Variables aléatoires — Fiche d'exercices

Première spécialité

Exercice 1

Dans chaque situation, proposer une variable aléatoire X puis donner sa loi.

1. On lance une pièce équilibrée deux fois. X est le nombre de piles obtenus.
2. On lance un dé équilibré. X vaut -2 si on obtient 1 ou 2, 1 si on obtient 3 ou 4, et 4 si on obtient 5 ou 6.
3. Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. $X = 1$ si la boule est noire et $X = 0$ sinon.

Exercice 2

La variable aléatoire X prend les valeurs $0, 2, 5$ et on sait que :

x_i	0	2	5	6	10
$P(X = x_i)$	0,1	a	0,5	0,2	0,1

1. Déterminer a.
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $P(X \geq 2)$, $P(X \leq 5)$ et $P(2 \leq X \leq 6)$.
4. Interpréter $E(X)$ dans une situation où X représente un gain (en €) par partie.

Exercice 3

Dans chaque cas, dire si les informations sont cohérentes pour une variable aléatoire. Si ce n'est pas cohérent, expliquer pourquoi et proposer une correction minimale.

1. Loi annoncée : X prend les valeurs $-1, 0, 2$ et

x_i	-1	0	2
$P(X = x_i)$	0,4	0,5	0,3

2. Un élève calcule $E(X) = 1{,}2$ et $E(X^2) = 1{,}0$ puis conclut que $V(X) = -0{,}44$.
3. On affirme : X prend les valeurs 0 et 5 avec $P(X = 5) = -0{,}1$.

Exercice 4

Une variable aléatoire X prend les valeurs $-3, 0, 6$. On sait que $P(X = -3) = 0{,}25$, $P(X = 0) = p$ et $P(X = 6) = 0{,}75 - p$.

1. Donner l'intervalle des valeurs possibles de p.
2. Calculer $E(X)$ en fonction de p.
3. Déterminer p pour que $E(X) = 1$.
4. Dans ce cas, calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$.

Exercice 5

On lance un dé équilibré.

— Si on obtient 6, on reçoit 9 €.

— Sinon, on ne reçoit rien.

Pour jouer, on paie une mise de t €. On note X le **gain algébrique** (réception − mise).

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ en fonction de t.
3. Le jeu est-il favorable au joueur si $t = 1$? Justifier.
4. Déterminer t pour que le jeu soit équitable.

Exercice 6

On donne la loi de X et de Y qui correspondent au gain de deux jeux d'argent différents :

x_i	-2	0	1	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

y_i	-8	6	10
$P(Y = y_i)$	0,5	0,2	0,3

1. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
2. Calculer $V(X)$ et $V(Y)$, en déduire $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
3. Interpréter les résultats obtenus : quel jeu est plus favorable ? Quel jeu est plus risqué ?

Exercice 7

On sait que $E(X) = 2$ et $V(X) = 3$. On pose $Y = 2X - 5$.

1. Calculer $E(Y)$.
2. Calculer $V(Y)$ puis $\sigma(Y)$.

Exercice 8

Une entreprise hésite entre deux options de coût (en €).

— Option A : coût aléatoire X avec $P(X = 3) = 0{,}7$ et $P(X = 8) = 0{,}3$.

— Option B : coût certain de 4,5.

1. Calculer $E(X)$.
2. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.
3. Comparer A et B : laquelle choisir si on regarde (a) la moyenne, (b) la prise de risque ?

Exercice 9

On lance une pièce telle que $P(\text{Pile}) = 0{,}3$. On effectue 3 lancers indépendants et on note X le nombre de piles obtenus.

1. Donner les valeurs possibles de X.
2. Établir la loi de X.
3. Calculer $E(X)$.
4. Que représente concrètement $E(X)$ ici ?

Exercice 10

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire 2 fois **sans remise**. On note X le nombre de boules noires obtenues.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $P(X \geq 1)$.
3. Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.
4. Comparer (en une phrase) avec la situation *avec remise* : a-t-on plus ou moins de dispersion ?

Exercice 11

Une urne contient 3 boules noires et n boules rouges, où $n \in \mathbb{N}^*$. On tire une boule au hasard.

1. On note B l'événement « tirer une boule noire ». Exprimer $P(B)$ en fonction de n.
2. On définit la variable aléatoire X (gain en €) par : $X = 5$ si la boule est noire, et $X = -1$ sinon. Donner la loi de X.
3. Calculer $E(X)$ en fonction de n.
4. Pour quelles valeurs de n le jeu est-il favorable au joueur ? Pour quelles valeurs est-il équitable ?

Exercice 12

Une urne contient 3 boules noires et n boules rouges, où $n \in \mathbb{N}^*$. On tire successivement **2 boules sans remise**.
À chaque tirage :

— si la boule est noire, le joueur gagne 5 € ;

— si la boule est rouge, le joueur perd 4 €.

On note X le **gain total** (en €) après les deux tirages.

1. Donner les valeurs possibles de X.
2. Dresser la loi de X sous forme d'un tableau.
3. Calculer $E(X)$ en fonction de n.
4. Pour quelles valeurs de n le jeu est-il favorable au joueur ?
5. Le jeu peut-il être équitable pour un entier n ? Justifier.
6. On décide maintenant de faire payer une mise d'entrée de t €. On note Y le gain algébrique final : $Y = X - t$. Déterminer t (en fonction de n) pour que le jeu devienne équitable.