

Variables aléatoires

Première spécialité

Vocabulaire

Univers : un ensemble Ω qui contient toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire.

Probabilité : une fonction \mathbb{P} qui, à chaque événement $A \subseteq \Omega$, associe un nombre $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$.

Variable aléatoire (v.a.) : une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à chaque issue ω un nombre réel $X(\omega)$.

On dit que X est **discrète** si elle ne prend qu'un nombre fini (ou dénombrable) de valeurs.

En première, on se limitera aux variables aléatoires discrètes prenant un nombre fini de valeurs.

Loi de probabilité d'une v.a. discrète

Si X prend les valeurs x_1, \dots, x_n , sa **loi de probabilité** est la donnée des probabilités :

$$P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

avec :

- $0 \leq p_i \leq 1$ pour tout i ;
- $p_1 + \dots + p_n = 1$.

Représentation (tableau de loi)

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

Espérance

Définition :

L'**espérance** de X est le nombre réel $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

Interprétation :

- L'espérance correspond à la **valeur moyenne** que prend X à long terme si on répète l'expérience de nombreuses fois.
- On dit que le jeu est équitabe si $E(X) = 0$.
- Si $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur, sinon il est défavorable.

Propriétés :

- $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Variance et Écart-type

Définition :

La **variance** de X est le nombre réel $V(X)$ défini par :

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i. \end{aligned}$$

Formule pratique (Koenig-Huygens) :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2. \end{aligned}$$

Propriétés :

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont indépendantes.

Écart-type

Définition :

L'**écart-type** de X est le nombre réel $\sigma(X)$ (se lit "sigma de X") défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Interprétation :

L'écart-type correspond est un indicateur de **dispersion** des valeurs autour de la moyenne.